8 LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD

REFLEXIONA Y RESUELVE

Algunos límites elementales

■ **Utiliza tu sentido común para dar el valor de los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^3$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} x^3$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x^2)$

c) $\lim\limits_{x \to 2} x^2$, $\quad \lim\limits_{x \to 2} x^3$, $\quad \lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 3)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2}$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2 + 1}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x}$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2}$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2 + 1}$

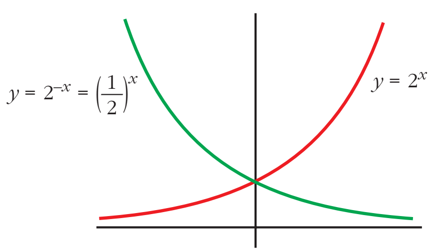
f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$, $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$, $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2 + 1}$

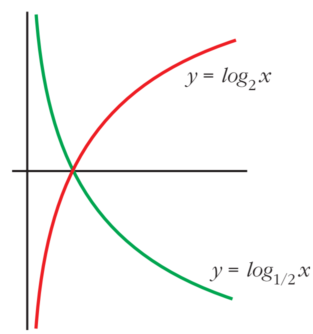
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 5x^2}{x^2 + 1}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{3x + 5}$

Exponenciales y logarítmicas

Recuerda cómo son las gráficas de algunas funciones exponenciales y logarítmicas:





■ **A la vista de estas gráficas, asigna valor a los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} 2^x$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{-x}, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_2 x, \quad \lim\limits_{x \to 0} \log_2 x, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_{1/2} x, \quad \lim\limits_{x \to 0} \log_{1/2} x, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \log_{1/2} x$

Con calculadora

Tanteando con la calculadora, da el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\ x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (x - 3) \cdot ln\,(x - 3)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

1. **Asigna límite (finito o infinito) a las siguientes sucesiones e identifica a las que no tienen límite:**

a) $a_n = n^3 - 10n^2$ b) $b_n = 5 - 3n^2$ c) $c_n = \dfrac{n+5}{2-n}$ d) $d_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

e) $e_n = sen\dfrac{\pi}{4}n$ f) $f_n = 2^n$ g) $g_n = -2^n$ h) $h_n = (-2)^n$

1. **Si $u(x) \to 2$ y $v(x) \to -3$ cuando $x \to +\infty$, calcula el límite cuando $x \to +\infty$ de:**

a) $u(x) + v(x)$

b) $v(x)/u(x)$

c) $5^{u(x)}$

d) $\sqrt{v(x)}$

e) $u(x) \cdot v(x)$

f) $\sqrt[3]{u(x)}$

2. **Si $u(x) \to -1$ y $v(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$, calcula el límite cuando $x \to +\infty$ de:**

a) $u(x) - v(x)$

b) $v(x) - u(x)$

c) $v(x)/u(x)$

d) $\log_2 v(x)$

e) $u(x) \cdot v(x)$

f) $\sqrt[3]{u(x)}$

3. **Halla los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 3x - x^3)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-5 \cdot 2^{2x})$

4. **Calcula estos límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2 + 2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2\log_{10} x)$

5. **Indica cuáles de las siguientes expresiones son infinitos $(\pm\infty)$ cuando $x \to +\infty$:**

a) $3x^5 - \sqrt{x} + 1$

b) $0{,}5^x$

c) $-1{,}5^x$

d) $\log_2 x$

e) $1/(x^3 + 1)$

f) $\sqrt{x}$

g) 4^x

h) 4^{-x}

i) -4^x

6. **a) Ordena de menor a mayor los órdenes de los siguientes infinitos:**

$$\log_2 x \qquad \sqrt{x} \qquad x^2 \qquad 3x^5 \qquad 1{,}5^x \qquad 4^x$$

b) Teniendo en cuenta el resultado anterior, calcula:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_2 x}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5}{x^2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1{,}5^x}$$

7. **Si, cuando $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 4$, $h(x) \to -\infty$, $u(x) \to 0$, asigna, siempre que puedas, límite cuando $x \to +\infty$ a las expresiones siguientes:**

a) $f(x) - h(x)$	b) $f(x)^{f(x)}$	c) $f(x) + h(x)$
d) $f(x)^x$	e) $f(x) \cdot h(x)$	f) $u(x)^{u(x)}$
g) $f(x)/h(x)$	h) $[-h(x)]^{h(x)}$	i) $g(x)^{h(x)}$
j) $u(x)/h(x)$	k) $f(x)/u(x)$	l) $h(x)/u(x)$
m) $g(x)/u(x)$	n) $x + f(x)$	ñ) $f(x)^{h(x)}$
o) $x + h(x)$	p) $h(x)^{h(x)}$	q) x^{-x}

8. **Las funciones f, g, h y u son las del ejercicio propuesto 7 (página anterior). Di cuáles de las siguientes funciones son indeterminaciones. En cada caso, si es indeterminación, di de qué tipo, y, si no lo es, di cuál es el límite:**

a) $f(x) + h(x)$

b) $f(x)/h(x)$

c) $f(x)^{-h(x)}$

d) $f(x)^{h(x)}$

e) $f(x)^{u(x)}$

f) $u(x)^{h(x)}$

g) $[g(x)/4]^{f(x)}$

h) $g(x)^{f(x)}$

1. **Sin operar, di el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:**

a) $(x^2 - \sqrt[3]{2x+1})$

b) $(x^2 - 2^x)$

c) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}$

d) $3^x - 2^x$

e) $5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}$

f) $\sqrt{x} - \log_5 x^4$

2. **Calcula el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:**

a) $\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}$ b) $\dfrac{x^3}{2x^2 + 1} - \dfrac{x}{2}$ c) $\dfrac{3x + 5}{2} - \dfrac{x^2 - 2}{x}$

d) $\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}$ e) $2x - \sqrt{x^2 + x}$ f) $\sqrt{x + 1} - \sqrt{x + 2}$

3. **Halla los siguientes límites cuando $x \to +\infty$:**

a) $\left(1 + \dfrac{1}{5x}\right)^{x}$ b) $\left(5 + \dfrac{1}{5x}\right)^{5x}$ c) $\left(1 + \dfrac{1}{5x}\right)^{5}$

d) $\left(1 + \dfrac{5}{x}\right)^{x}$ e) $\left(5 + \dfrac{5}{x}\right)^{5x}$ f) $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{5x}$

5 1/5

4. **Calcula estos límites cuando $x \to +\infty$:**

a) $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{3x-2}$ b) $\left(1 - \dfrac{1}{2x}\right)^{4x}$ c) $\left(1 + \dfrac{1}{5x}\right)^{3x}$

d) $\left(1 + \dfrac{3}{2x}\right)^{5}$ e) $\left(1 - \dfrac{1}{2x}\right)^{3x}$ f) $\left(1 + \dfrac{2}{5x}\right)^{5x}$

5. **Resuelve, aplicando la regla anterior:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+5}{3x-1}\right)^{5x-3}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3-3x+2}{x^3+x^2}\right)^{2x-4}$

1. **Sin operar, di el límite cuando $x \to -\infty$ de las siguientes expresiones:**

a) $x^2 - \sqrt[3]{2x+1}$

b) $x^2 + 2^x$

c) $x^2 - 2^x$

d) $x^2 - 2^{-x}$

e) $2^{-x} - 3^{-x}$

f) $\sqrt{x^5-1} - 5^x$

g) $2^x - x^2$

h) $x^2 - \sqrt{x^4-1}$

i) $\sqrt[3]{x+2} - x^2$

j) $3^{-x} - 2^{-x}$

2. **Calcula el límite cuando $x \to -\infty$ de las siguientes expresiones:**

a) $\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}$

b) $\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}$

c) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$

d) $2x + \sqrt{x^2+x}$

e) $\sqrt{x^2+2x} + x$

f) $\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

g) $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{5x+3}$

h) $\left(\dfrac{x^2+x-1}{x^2+2}\right)^{3x-1}$

1. **Si $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$ y $\lim_{x \to 1} g(x) = 2$, di el valor del límite cuando x tiende a 1 de las siguientes funciones:**

a) $f(x) + g(x)$ **b)** $f(x) \cdot g(x)$ **c)** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

d) $f(x)^{g(x)}$ **e)** $\sqrt{g(x)}$ **f)** $4f(x) - 5g(x)$

2. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$, entonces $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l + m$.

Enuncia las restantes propiedades de los límites de las operaciones con funciones empleando la notación adecuada.

3. Si $\lim\limits_{x \to 2} p(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2} q(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2} r(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to 2} s(x) = 0$, di, en los casos en que sea posible, el valor del $\lim\limits_{x \to 2}$ de las siguientes funciones:

[Recuerda que las expresiones $(+\infty)/(+\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(0) \cdot (+\infty)$, $(1)^{(+\infty)}$, $(0)/(0)$ son indeterminaciones].

a) $2p(x) + q(x)$ b) $p(x) - 3q(x)$ c) $\dfrac{r(x)}{p(x)}$ d) $\dfrac{p(x)}{p(x)}$

e) $\dfrac{s(x)}{q(x)}$ f) $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ g) $s(x) \cdot p(x)$ h) $s(x)^{s(x)}$

i) $p(x)^{r(x)}$ j) $r(x)^{s(x)}$ k) $\dfrac{3 - r(x)}{s(x)}$ l) $\left[\dfrac{r(x)}{3}\right]^{s(x)}$

m) $r(x)^{p(x)}$ n) $r(x)^{-q(x)}$ ñ) $\left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{p(x)}$ o) $\left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{-p(x)}$

4. **Calcula los límites siguientes:**

a) $\displaystyle \lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7}$

b) $\displaystyle \lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

5. **Calcula los límites siguientes:**

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$

6. **Calcula:** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right)$

7. **Calcula:** $\lim\limits_{x \to 7} \left(\dfrac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} \right)^{\frac{x + 1}{x - 7}}$

x

1. **Encuentra cuatro intervalos distintos en cada uno de los cuales tenga una raíz la ecuación siguiente:**

$$2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0$$

Busca los intervalos entre –4 y 3. Comprueba que $f(1,5) < 0$ y tenlo en cuenta.

2. **Comprueba que las funciones $e^x + e^{-x} - 1$ y $e^x - e^{-x}$ se cortan en algún punto.**

3. **Justifica cuáles de las siguientes funciones tienen máximo y mínimo absoluto en el intervalo correspondiente:**

a) $x^2 - 1$ **en** $[-1, 1]$

b) x^2 **en** $[-3, 4]$

c) $1/(x - 1)$ **en** $[2, 5]$

d) $1/(x - 1)$ **en** $[0, 2]$

e) $1/(1 + x^2)$ **en** $[-5, 10]$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Límites cuando $x \to \pm\infty$

1 **Sabiendo que** $\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = -\infty$ **y** $\lim c_n = 3$, **di en cuáles de los siguientes casos hay indeterminación.**

En los casos en que no la haya, di cuál es el límite:

a) $a_n + b_n$ b) $b_n + c_n$ c) $\dfrac{a_n}{c_n}$ d) $\dfrac{a_n}{b_n}$

e) $(c_n)^{b_n}$ f) $(3 - c_n) \cdot a_n$ g) $\dfrac{b_n}{3 - c_n}$ h) $\left(\dfrac{3}{c_n}\right)^{b_n}$

2 **Calcula los límites cuando** $x \to -\infty$ **de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{2x + 5}{2 - x}$ b) $g(x) = \dfrac{10x - 5}{x^2 + 1}$

c) $h(x) = \dfrac{3x^2 + x - 4}{2x + 3}$ d) $i(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 3}{7 + 5x^3}$

3 **Calcula los límites de las sucesiones siguientes:**

a) $lím \dfrac{\sqrt{3n^2 + 6n}}{2n + 1}$

b) $lím \sqrt{\dfrac{5n^2 - 7}{n + 1}}$

c) $lím \dfrac{1 + \sqrt{n}}{2n - 3}$

d) $lím \dfrac{3n}{\sqrt{n^3 + 2}}$

4 **Calcula estos límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x^2 + 1)}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{e^x}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7}\right)$

5 **Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{1 - 3x}$

6 **Halla:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)$

7 **Calcula el límite de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$:**

a) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x - 1)^2}$

b) $g(x) = \dfrac{x + \log x}{\log x}$

c) $h(x) = \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x + 1}}$

d) $i(x) = \dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1}$

8 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x + 1} - \dfrac{3x}{2} \right)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4 + 2x} \right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x + 1} \right)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x + 4}{2x + 5} \right)^{x - 1}$

9 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x-4}{3x-2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^{3x-2}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{x^2-5}$

10 **Halla $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ en los siguientes casos:**

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1 - \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x^2}{x} & \text{si } x \ne 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Límites en un punto

11 **Sabiendo que:**

$$\lim_{x \to 2} p(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 2} q(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 2} r(x) = 3 \qquad \lim_{x \to 2} s(x) = 0$$

di, en los casos en que sea posible, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x)]^{p(x)}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot q(x)]$

d) $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 2q(x)]$

12 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 + 3}{x^3} - \dfrac{1}{x} \right)$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)} \right]$

13 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 7x + 6}{1 - x}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)^3}{1 - x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^2 - x - 2}$

d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

$=$ $=$ $= 0$

14 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{3}{x^2 - 5x + 6} - \dfrac{4}{x - 2} \right]$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1 - \sqrt{3 - x}}{x - 2} \right)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x + 9} - 3}{x^2} \right)$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{3x} \right]$

$x \to 0 \quad 3x(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}) \qquad x \to 0 \quad 3(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}) \qquad 3 \cdot 2 \qquad 3$

15 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2x^2-x-1}{7-x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

Continuidad

16 **Averigua si estas funciones son continuas en $x = 2$:**

a) $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x < 2 \\ 6-x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x+1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

s17 **Estudia la continuidad de estas funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

18 **Halla los puntos de discontinuidad de la función** $y = \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{12}{x^2-9}$ **y di si en alguno de ellos la discontinuidad es evitable.**

PARA RESOLVER

19 **a) Calcula el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to 0$, $x \to 2$, $x \to 3$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$:**

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-5x+6}$$

b) Representa gráficamente los resultados.

s20 **Calcula el valor que debe tener k para que las siguientes funciones sean continuas:**

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \le 2 \\ k - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + k & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} e^{kx} & \text{si } x \le 0 \\ x + 2k & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Página 251

s21 **Calcula el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea continua:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{si } x \ne 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{si } x \ne 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

22 **Estudia la continuidad de esta función:** $f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

23 **Un comerciante vende un determinado producto. Por cada unidad de producto cobra 5 €. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra:**

$$C(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \le 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

a) Halla a de modo que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran "muchísimas" unidades?

☛ ***El precio de una unidad es $C(x)/x$.***

s24 **En el laboratorio de Biología de la universidad, han determinado que el tamaño T de los ejemplares de una cierta bacteria (medido en micras) varía con el tiempo t, siguiendo la ley:**

$$T(t) = \begin{cases} \sqrt{t + a} & \text{si } t < 8 \text{ horas} \\ \dfrac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} & \text{si } t > 8 \text{ horas} \end{cases}$$

El parámetro a es una variable biológica cuya interpretación trae de cabeza a los científicos, pero piensan que puede haber un valor para el cual el crecimiento se mantenga continuo en $t = 8$.

a) Decide la cuestión.

b) Investiga cuál llegará a ser el tamaño de una bacteria si se la cultiva indefinidamente.

25 **Dada $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$, justifica que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.**

26 **Calcula el límite de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, definiéndolas previamente por intervalos:**

a) $f(x) = |x - 3| - |x|$ **b)** $f(x) = |2x - 1| + x$ **c)** $f(x) = \dfrac{x + 1}{|x|}$

27 **Estudia la continuidad en $x = 0$ de la función:**

$$y = 2x + \frac{|x|}{x}$$

¿Qué tipo de discontinuidad tiene?

s28 **Se define la función f del modo siguiente:**

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + ax + b & \text{si } x \le 1 \end{cases}$$

Encuentra los valores de a y b para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

CUESTIONES TEÓRICAS

29 **Si una función no está definida en $x = 3$, ¿puede ocurrir que $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$?**

¿Puede ser continua la función en $x = 3$?

30 **De una función continua, f, sabemos que $f(x) < 0$ si $x < 2$ y $f(x) > 0$ si $x > 2$. ¿Podemos saber el valor de $\lim_{x \to 2} f(x)$?**

s31 **Sea la función $f(x) = x^2 + 1$.**

¿Podemos asegurar que dicha función toma todos los valores del intervalo [1, 5]? En caso afirmativo, enuncia el teorema que lo justifica.

s32 **Da una interpretación geométrica del teorema de Bolzano y utilízalo para demostrar que las gráficas de $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos x$ se cortan en algún punto.**

☛ ***Mira el ejercicio resuelto 11.***

s33 **Considera la función:**

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

El segundo miembro de la igualdad carece de sentido cuando $x = 2$. ¿Cómo elegir el valor de $f(2)$ para que la función f sea continua en ese punto?

34 **De una función g se sabe que es continua en el intervalo cerrado [0, 1] y que para $0 < x \le 1$ es $g(x) = \dfrac{x^2 + x}{x}$. ¿Cuánto vale $g(0)$?**

s35 **Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 4}{4} & \text{si } 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ e^{-x^2} & \text{si } \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

observamos que f está definida en [0, 1] y que verifica $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e^{-1} > 0$, pero no existe ningún $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$. ¿Contradice el teorema de Bolzano? Razona la respuesta.

f

s36 **Se sabe que $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y que $f(a) = 3$ y $f(b) = 5$. ¿Es posible asegurar que para algún c del intervalo $[a, b]$ cumple que $f(c) = 7$? Razona la respuesta y pon ejemplos.**

s37 **Halla razonadamente dos funciones que no sean continuas en un punto x_0 de su dominio y tales que la función suma sea continua en dicho punto.**

s38 **¿Tiene alguna raíz real la siguiente ecuación?:**

$$sen\ x + 2x + 1 = 0$$

Si la respuesta es afirmativa, determina un intervalo de amplitud menor que 2 en el que se encuentre la raíz.

s39 **Demuestra que la ecuación $x^5 + x + 1 = 0$ tiene, al menos, una solución real.**

f

s40 **Una ecuación polinómica de grado 3 es seguro que tiene alguna raíz real. Demuestra que es así, y di si ocurre lo mismo con las de grado 4.**

s41 **Si el término independiente de un polinomio en x es igual a –5 y el valor que toma el polinomio para $x = 3$ es 7, razona que hay algún punto en el intervalo (0, 3) en el que el polinomio toma el valor –2.**

s42 **La función $y = tg\ x$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ y, sin embargo, no se anula en él. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?**

s43 **Considera la función $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Determina su dominio. Dibuja su gráfica y razona si se puede asignar un valor a $f(0)$ para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.**

s44 **Si existe el límite de una función $f(x)$ cuando $x \to a$, y si $f(x)$ es positivo cuando $x < a$, ¿podemos asegurar que tal límite es positivo? ¿Y que no es negativo? Justifica razonadamente las respuestas.**

s45 **a) Comprueba que $\lim\limits_{x \to +\infty} [ln(x+1) - ln(x)] = 0$.**

b) Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} x[ln(x+1) - ln(x)]$.

s46 **De dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se sabe que son continuas en el intervalo $[a, b]$, que $f(a) > g(a)$ y que $f(b) < g(b)$.**

¿Puede demostrarse que existe algún punto c de dicho intervalo en el que se corten las gráficas de las dos funciones?

s47 **Si $f(x)$ es continua en [1, 9], $f(1) = -5$ y $f(9) > 0$, ¿podemos asegurar que la función $g(x) = f(x) + 3$ tiene al menos un cero en el intervalo [1, 9]?**

48 **Escribe una definición para cada una de estas expresiones y haz una representación de f:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ **c)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$ **e)** $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = +\infty$ **f)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$

PARA PROFUNDIZAR

49 **Estudia el comportamiento de cada una de estas funciones cuando x tiende a $+\infty$:**

a) $f(x) = x^3 - sen\ x$

b) $g(x) = \dfrac{cos\ x}{x^2 + 1}$

c) $h(x) = \dfrac{E[x]}{x}$

d) $j(x) = \dfrac{3x + sen\ x}{x}$

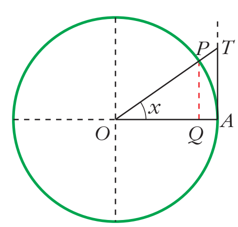
50 **En una circunferencia de radio 1, tomamos un ángulo $\widehat{AOP}$ de x radianes. Observa que:**

$\overline{PQ} = sen\ x$, $\overline{TA} = tg\ x$ y $arco\ \overset{\frown}{PA} = x$

Como $\overline{PQ} < \overset{\frown}{PA} < \overline{TA} \rightarrow sen\ x < x < tg\ x$

A partir de esa desigualdad, prueba que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$$



51 Sabiendo que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1$, calcula:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\text{sen } x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{2x}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{2x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \text{sen } x}{x}$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x}{x}$ f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

52 Supongamos que f es continua en $[0, 1]$ y que $0 < f(x) < 1$ para todo x de $[0, 1]$. Prueba que existe un número c de $(0, 1)$ tal que $f(c) = c$.

Haz una gráfica para que el resultado sea evidente.

☛ *Aplica el teorema de Bolzano a la función $g(x) = f(x) - x$.*

AUTOEVALUACIÓN

1. **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 10x^2 - \sqrt{x^6 - 5x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{\log(x^2 + 1)}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} (x)^{1/(1-x)}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1}\right)$

2. Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$:

a) Estudia su continuidad.

b) Halla $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

3. a) Estudia la continuidad de $f(x) = \dfrac{9 - x^2}{x^2 + 3x}$ y justifica qué tipo de discontinuidad tiene.

b) Halla sus límites cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.

c) Representa la información obtenida en a) y b).

4. **Halla a para que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{ax + 1}} = \dfrac{1}{2}$.**

5. **Halla a y b para que esta función sea continua y represéntala:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 0 \\ x - a & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{a}{x} + b & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

6. **Dada la función $f(x) = sen\,\dfrac{\pi}{4}x$, demuestra que existe un $c \in (0, 4)$ tal que $f(c) = f(c + 1)$.**

7. **Sea la función $f(x) = x + e^{-x}$. Demuestra que existe algún número real c tal que $c + e^{-c} = 4$.**

8. **Expresa simbólicamente cada una de estas frases y haz una representación gráfica de cada caso:**

a) **Podemos conseguir que $f(x)$ sea mayor que cualquier número K, por grande que sea, dando a x valores tan grandes como sea necesario.**

b) **Si pretendemos que los valores de $g(x)$ estén tan próximos a 1 como queramos, tendremos que dar a x valores suficientemente grandes.**